

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ (1)**

ΣΑΒΒΑΤΟ, 11 ΜΑΡΤΙΟΥ 2017

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ  
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.i.** Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (**Μονάδες 2**) και στη συνέχεια να το αποδείξετε (**Μονάδες 4**).

ii. Να δώσετε ένα παράδειγμα, σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα, μιας συνάρτησης  $f$  που δεν είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , η οποία **δεν** παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα  $f(\alpha)$ ,  $f(\beta)$  (**Μονάδες 2**).

**A2.** Να βρείτε το **λάθος** στον επόμενο συλλογισμό (**Μονάδες 2**). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (**Μονάδες 2**).

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I$$

(θέσαμε  $x = \frac{1}{u}$ , οπότε  $dx = -\frac{1}{u^2}$ ).

Άρα  $I = -I$ , οπότε  $I = 0$ . Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού  $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0$ , επειδή  $\frac{1}{1+x^2} > 0$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ .

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και ισχύει  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**β)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι  $[f(\alpha), f(\beta)]$  ή  $[f(\beta), f(\alpha)]$ .

**γ)** Αν για μια συνάρτηση  $f$  και για ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ τότε η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0.$$

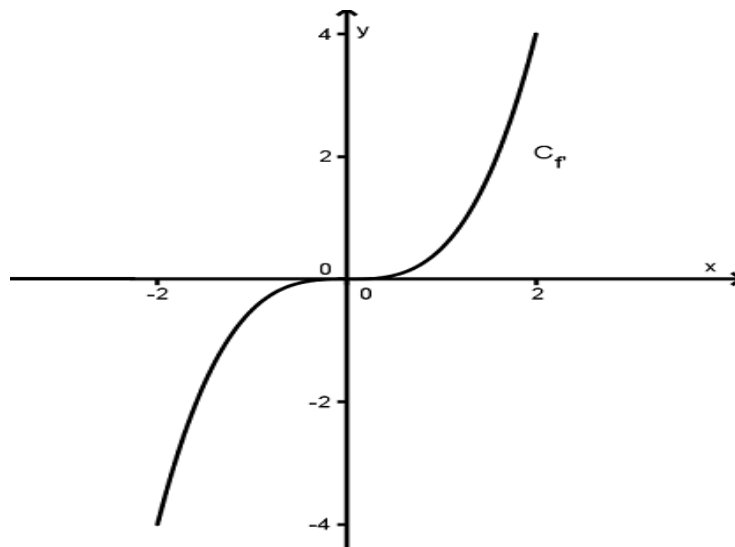
**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  δεν έχει ασύμπτωτες.

**ε)** Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , τότε κατ'ανάγκη  $\beta = \gamma$ .

**(Μονάδες 5x2= 10)**

**A4.** Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-2, 2]$ . Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **(Μονάδες 2)** και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας **(Μονάδα 1)**

## ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

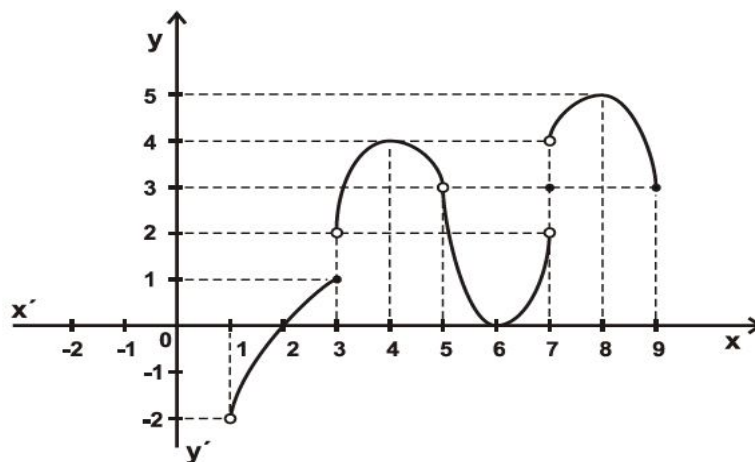


Το σημείο  $A(0, f(0))$  είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της  $f$ ,
2. θέση τοπικού ελάχιστου της  $f$ ,
3. σημείο καμπής της  $C_f$ .

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

(Μονάδες 2)

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$                       β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$                       γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$   
δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$                       ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$                       β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$                       γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

**B5.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = e^x + x^2 + x, x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός  $\alpha \in (-1, 0)$  τέτοιος, ώστε να

ισχύει:  $e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0$ .

(Μονάδες 5)

**Γ2.** Να δείξετε ότι:  $f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $\alpha$  ο αριθμός του

ερωτήματος Γ1.

(Μονάδες 5)

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{2017}{2016}$ .

(Μονάδες 5)

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^2+1) + f(x^2+2) < f(x^2) + f(x^2+3), \text{ για κάθε } x > 0$$

(Μονάδες 5)

Γ5. Έστω ένα σημείο  $M(x(t), y(t))$ , όπου  $t$  ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της  $f$  με  $x'(t) \neq 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0$ , με  $x(t_0) \in (-1, 0)$ , ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του  $M$ , ως προς τον χρόνο, να μηδενίζεται.

(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = x \eta \mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f(0) = 0$$

Δ1. i. Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(Μονάδες 3)

ii. Να δείξετε ότι:

$$\eta \mu x > x \sigma \upsilon \nu x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(Μονάδες 2)

Δ2. Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = |x \epsilon \phi x - x^2|, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Δ3. i.** Αν  $\alpha > 0$ , να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης  $g(x) = \alpha$  είναι μηδέν.

**(Μονάδες 4)**

**ii.** Έστω  $x_1, x_2, x_3$  οι θετικές ρίζες των εξισώσεων  $g(x_1) = 1, g(x_2) = 2, g(x_3) = 3$

αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $\xi_1 < \xi_2$  τέτοια, ώστε:

$$(x_2 - x_1)g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)g'(\xi_2) = 2$$

**(Μονάδες 4)**

**Δ4. i.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x \sigma\upsilon\nu x + x}$$

**(Μονάδες 3)**

**ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές

παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $-f'$  και την ευθεία  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**(Μονάδες 5)**

## Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

